数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 172-183

Some Remarks on Pseudo-Cyclic Association Schemes

Eiichi Bannai（坂内 英一）
Graduate School Kyushu University（九大・数理）

このノートは 2006 年 12 月 18 日ー21 日の京大会館で開催された京大数理研研究集会「群論とその周辺」（代表者千吉良直紀）における講演の OHP の原稿をほぼそのままに採録したものです。もとの OHP 原稿は英語であったこともあって、日本語と英語のチャンポンになってしまっていますが御了承下さい。Pseudo-cyclic association scheme について主に２つのことを２つのセクションでそれぞれ述べたいと思います。いずれも考え始めてから比較的日が浅いテーマで、内容的に深いところまで追求されていなくて、得られた結果という点ではまだ物足りないことは承知していますが、問題提起という点では面白い筈と思っています。

1 ガウス和の一般化について

以下 $\mathfrak{X}$ を comutative association scheme とし、その Bose-Mesner algebra を

$$\langle A_0, A_1, \ldots, A_d\rangle = \langle E_0, E_1, \ldots, E_d\rangle,$$

$k_0, k_1, \ldots, k_d$ を valencies, $m_0, m_1, \ldots, m_d$ を dual valencies （すなわち m_i は E_i の行列としてのランク）とします。

- $\mathfrak{X}$ が pseudo-cyclic であるとは、

$$m_0 = 1, \quad m_1 = \cdots = m_d (= k = \frac{|X|-1}{d})$$

であることと定義され、pseudo-cyclic であれば

$$k_0 = 1, \quad k_1 = \cdots = k_d (= k)$$

が成り立つことが知られています。(容易に示されます。) ただし逆は一般には成り立たないことも知られています。

- $|X| = p$ ならば $\mathfrak{X}$ が pseudo-cyclic であることが知られています (花木-宇野) 。

ここで、 $\mathfrak{X}$ の指標表（第一固有行列）を

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & \cdots & k \\ 1 & & & \\ \vdots & & P_0 & \\ \vdots & & (d \times d) & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

とします。このとき（有限群の指標表の直交関係と同様に）P は２種類の直交関係を満たすことは良く知られています。また P_0 を 指標表 P の essential part と呼ぶことにします。

- **How much freedom does P_0 have ?** という問題を先ず考えます。

このとき、次のことが分かります。

If all the entries of P_0 are real, then P_0 corresponds to a regular simplex (of d points) inscribed in $S^{d-2} \subset \mathbb{R}^{d-1}$.

このことから、どれだけの自由度があるか良くわかります。一般にかなりの自由度があります。最初の Remark で言いたいことの主要部分は次の結果です。

Theorem.
If $\mathfrak{X}$ is pseudo-cyclic, then P_0 has an eigenvalue -1 with multiplicity 1 and all the other eigenvalues are complex numbers whose absolute values are $\sqrt{|X|} = \sqrt{1+dk}$.

Proof (証明は比較的容易です)

$$\overline{{}^tP_0}P_0 = P_0\overline{{}^tP_0} = \begin{bmatrix} (d-1)k+1 & & -k \\ & \ddots & \\ -k & & (d-1)k+1 \end{bmatrix}$$

が直交関係から成立ちます。このことから P_0 は正規行列であり、

$$P_0 \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{bmatrix},$$

とすると、

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\overline{\lambda_1} & & & \\ & \lambda_2\overline{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d\overline{\lambda_d} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & dk+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & dk+1 \end{bmatrix}.$$

が成立ちます。したがって、定理の主張が言えます。

ここで重要なことは、次の注意です。

- **The eigenvalues of P_0 are regarded as generalization of ordinary Gauss sums.**

  何故そう考えられるかを次に見てみましょう。

- **Cyclotomic association schemes**

$\mathbb{F}_q$, $q = p^r$, $q - 1 = dk$,
$\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$, $H = \langle a^d \rangle$ とする。このとき、
$|\mathbb{F}_q^* : H| = d$, $G = \mathbb{F}_q H$, $|G| = qk$ であり、G は $\mathbb{F}_q$ に働く。ここで、$\mathbb{F}_q = (\mathbb{F}_q, +)$ は加法群と見ている。さらに、
χ = a fixed non-trivial character of $(\mathbb{F}_q, +)$,
ψ = a multiplicative character of $\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$ defined by $\psi(a^j) = \xi^j$,
where ξ is a primitive d-th root of unity. とする。
このとき、P_0 の行と列の順序として自然なものを取ると、

$$P_0 = \sum_{i=0}^{d-1} \eta_i C^i$$

with $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
とできる。ここで、

$$\eta_i = \sum_{\beta \in \langle a^d \rangle a^i} \chi(\beta) \ (0 \le i \le d-1)$$

であり、

$$G(\psi_i, \chi) = \sum_{x \in G} \psi^i(x) \chi(x)$$

と定義すると、

$$P_0 \sim \text{diag } (G(\psi^0, \chi)(= -1), G(\psi, \chi), G(\psi^2, \chi), \cdots, G(\psi^{d-1}, \chi))$$

が成り立つ。すなわち、古典的なガウス和 $G(\psi^i, \chi)$ は Cyclotomic association scheme と呼ばれる特別な Pseudo-cyclic association scheme の特別な行と列の順序に関する行列 P_0 の固有値になっているわけです。

Proposal of research problems

- **Are these (non-standard) Gauss sums useful ?**

• **How about an analogue of Jacobi sums (for pseudo-cyclic association schemes) ?**

• **In what algebraic number fields, do these (generalized) Gauss sums (and/or Jacobi sums) belong ?**

以上の問について、まだ考え始めたばかりで具体的な成果はあまり得られていませんが、自分では面白くかつ重要であると思っています。多くの興味ある実例と数値計算が九大の三枝崎剛君により成されています。それらについては、ここでは述べませんが、機会があれば別のチャンスに触れたいと思います。なお、上の２番目に述べたガウス和と Jacobi 和の関係は次の古典的な関係を出発点にして考えたいと思います。

$$J(\psi^i, \psi^j) = \frac{G(\psi^i, \chi)G(\psi^j, \chi)}{G(\psi^{i+j}, \chi)}.$$

なお、上の３番目に述べたことですが、例えば Amorphic な pseudo-cyclic association scheme の場合は、P_0 の行、列の順序をどのようにとっても、ガウス和は有理数体上の円分体（したがって $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大体）に入るというようなことも分ります。

2 素数次のアソシエーションスキームで指標表の値が円分体に入らないものの存在の可能性

以下一番考えたい問題は次の問題です。この問題の答えが肯定的であるか否定的であるかは、アソシエーションスキームの表現論が有限群の表現論とどれくらい異なるかの良い判断基準になると思います。

Problem. Is there a commutative association scheme whose character table is not in a cyclotomic number field ?

素数次の（すなわち素数個の点からなる）アソシエーションスキームについて、次の結果が花木一宇野により得られています。

(Hanaki-Uno) Let $|X| = p$, If such an association scheme (whose character table is not in a cyclotomic number field) exists, then there exists an algebraic number field $K/\mathbb{Q}$ satisfying certain specific conditions.

どちらかと言えば、花木一宇野ではそのような代数体の非存在を示すことにより、そのようなアソシエーションスキームの非存在を示したかったのだと思います。そのような代数体が実は存在することは、最近小松亨氏（九大数理 COE 研究員）により示されました。この小松亨氏の構成した代数体から出発して、素数次のアソシエーションスキームで指標表の値が円分体に入らないものの構成を考えようというのが、２番目の Remark です。残念ながら、まだ成功したとは言えない状況です。実際そのようなものが存在するか否かは微妙ですが、存在する可能性は大きいと思っています。

Komatsu has actually constructed number fields K satisfying these conditions in particular for $d = 6$ and $d = 4$. (preprint: Tamely Eisenstein field with prime power discriminant, March 2006.)

先ず、次の結果を思い出しましょう。

(Munemasa, JCT(A), 1991)
可換なアソシエーションスキームに対して、その指標表を
$P = \left(P_j(i)\right)_{\substack{0 \le i \le d \\ 0 \le j \le}}$ **とする。このとき、**
$Gal(\mathbb{Q}(\{P_j(i) \mid 0 \le i, j \le d\})/\mathbb{Q}(\{q_{i,j}^k \mid 0 \le i, j, k \le d\})$ **is an abelian extension. That is,**

$$Gal(\mathbb{Q}(\{P_j(i) \mid 0 \le i, j \le d\})/\mathbb{Q}(\{q_{i,j}^k \mid 0 \le i, j, k \le d\})$$
$$\subseteq \mathbb{Z}(Gal(\mathbb{Q}(\{P_j(i) \mid 0 \le i, j \le d\})/\mathbb{Q}))$$

が成り立つ。 ここで、$q_{i,j}^k$ は $(|X|E_i) \circ (|X|E_j) = \sum_{k=0}^{d} q_{j,j}^k (|X|E_k)$. で定義される Krein パラメターです。

さて、花木一宇野、小松、に出て来た代数体 K は次の 6 つの条件を満たすものです。

K algebraic number field over $\mathbb{Q}$ with $d = [K, \mathbb{Q}]$ で 次を満たす.

1. The field K is <u>not</u> a Galois extension over $\mathbb{Q}$.
2. $d|(p-1)$.
3. The discriminant $\mathrm{disc}(K/\mathbb{Q})$ of K is equal to $\pm p^{d-1} \equiv 1 \pmod 4$.
4. The field K is a p-Eisenstein field.
5. The extension $K/\mathbb{Q}$ is unramified at all prime numbers other than p.
6. The field K is totally real or totally imaginary.

以下、小松氏の結果の特別な場合を述べます。正確には、彼のプレプリントの Proposition 5.3 で、$d = 4$ の場合に関して考えます。

For $p = 2713, 2777, 2857$, and 3137, the polynomials

$$x^4 - 2713x^2 - 2713x + 5426,$$
$$x^4 - 2777x^2 - 8331x - 5554,$$
$$x^4 - 5714x^2 - 22856x + 48569,$$
$$x^4 - 3137x^2 - 47055x - 156850$$

are <u>p-Eisenstein polynomials</u> whose minimum splitting fields over $\mathbb{Q}$ are all Galois S_4-extensions. Every zero of the p-Eisenstein polynomials given above

is a p-Eisenstein number which generates a non-Galois, totally real and quartic field with discriminant p^3.

(ここで、p-Eisenstein polynomial の定義は、$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $p|a_i$ $(1 \le i \le n)$, $p^2 \nmid a_n$. で与えられます。)

以下考えたい問題は次の問題です。

- **Are there association schemes related to these polynomials ?**

以下次のように記号を決めます。

$|X| = p = 1 + dk$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & \cdots & k \\ 1 & & & \\ \vdots & & P_0 & \\ \vdots & & (d \times d) & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \qquad P_0 = \chi(\sigma_g).$$

すなわち、P_0 の行は χ で、列は g でパラメタライズされているとします。

次のことはこの問題を考えるとき有効です。

Proosition 3.5 (in Hanaki: Proc. of Sendai Conf. Min. Conf. on Number Theory and Combinatorics, Jan. 2006.) For each χ, there exists a g so that $\chi(\sigma_g) - k$ is a root of a p-Eisenstein polynomial of degree d.

これを $d = 4$ の場合に具体的に適応します。すなわち、Let

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & k & k & k \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{bmatrix},$$

where x_1, x_2, x_3, x_4 (y_1, y_2, y_3, y_4, ... etc) are the roots of a polynomial

$x^4 + x^3 - \frac{3k}{2}x^2 +$ (lower terms).

Take $y = x - k$, then

$y^4 + py^3 + \frac{3kp}{2}y^2 + apy + bp.$

これは、この y の 4 次多項式が p-Eisenstein 多項式でなければならないと言うことであり、パラメターは a, b の 2 つだけになるので、可能性を非常に制限します。

I asked Komatsu what are the list of (a, b) for all the Eisenstein polynomials satisfying the conditions (of Proposition 5.3 in Komatsu). Komatsu gave the following answer immediately.

$p = 2713,\ (a, b) =$
$(459511, 77827886) \quad \cdots\cdots\cdots \ g_1(x)$
$(459514, 77829977) \quad \cdots\cdots\cdots \ g_2(x)$
$(459514, 77829983) \quad \cdots\cdots\cdots \ g_3(x)$
$(459520, 77833949) \quad \cdots\cdots\cdots \ g_4(x)$

$p = 2777, (a, b) =$
$(481460, 83471789)$
$(481463, 83473958)$
$(481466, 83475971)$
$(481466, 83475977)$

$p = 2777, (a, b) =$
$(481462, 83473215)$
$(481463, 83473894)$
$(481464, 83474631)$
$(481468, 83477325)$

$p = 2857, (a, b) =$
$(509615, 90901200)$
$(509616, 90901953)$
$(509618, 90903345)$
$(509618, 90903375)$

$p = 3137, (a, b) =$
$(614457, 120354970)$
$(614457, 120355000)$
$(614460, 120357400)$
$(614463, 120359662)$

This was exactly what I was looking for. （解が４種類ずつ出て来てくれることを期待していたので、期待通りでした。これを期待した理由は、次に述べるステップが可能なことを想定していたからです。$p = 2777$ のときは、解は８個出てきますが、４種類ずつの２組に分れます。）

Next, I asked Komatsu whether it is possible to arrange the zeros of $g_i(x) = x^4 + x^3 - \frac{3k}{2}x^2 + \cdots$ so that the following holds:

x_1, x_2, x_3, x_4 **are the zeros of** $g_1(x)$,
y_1, y_2, y_3, y_4 **are the zeros of** $g_2(x)$,
z_1, z_2, z_3, z_4 **are the zeros of** $g_3(x)$,
w_1, w_2, w_3, w_4 **are the zeros of** $g_4(x)$,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & k & k & k \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{bmatrix} = \Big(P_j(i)\Big)_{\substack{0\le j\le 4\\ 0\le i\le 4}},$$ **and the following $p_{i,j}^k$ are non-negative integers, where**

$$p_{i,j}^k = \frac{1}{|X|k_k}\sum_{\nu=0}^{4} P_i(\nu)P_j(\nu)P_k(\nu)m_\nu.$$

Moreover if we put $B_i = \left(p_{i,j}^k\right)_{\substack{0\le j\le 4\\ 0\le i\le 4}}$, then eigenvalues of B_i are the zeros of $(x-k)g_i(x)$ for $i=1,2,3,4$ (where $B_0 = I$). The following tables show that every conditions are perfectlly satisfied!!!
$p=2713$ の場合は次の結果が得られました。(これは先の小松さんの計算結果に基づいて自分でも計算できました。) 小松さんからも $p = 2713$, 2777, 2857, and 3137 の一般の場合の結果も直ちに教えていただきました。$p = 2713$ 以外の結果はこのノートの最後に補足として加えます。

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 678 & 179 & 162 & 160 & 176 \\ 0 & 162 & 164 & 185 & 167 \\ 0 & 160 & 185 & 166 & 167 \\ 0 & 176 & 167 & 167 & 168 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 162 & 164 & 185 & 167 \\ 678 & 164 & 170 & 168 & 175 \\ 0 & 185 & 168 & 167 & 158 \\ 0 & 167 & 175 & 158 & 178 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 160. & 185 & 166 & 167 \\ 0 & 185 & 168 & 167 & 158 \\ 678 & 166 & 167 & 170 & 174 \\ 0 & 167 & 158 & 174 & 179 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 176 & 167 & 167 & 168 \\ 0 & 167 & 175 & 158 & 178 \\ 0 & 167 & 158 & 174 & 179 \\ 678 & 168 & 178 & 179 & 152 \end{bmatrix}$$

So, at the algebraic lebel, i.e. C-algebras, or Table algebras, there exist such objects <u>whose character tables are not in a cyclotomic number field.</u>

However, it is still open whether it exists at combinatorial level, i.e., as association schemes!!

最後に **Unsuccessful attempt** を記して終わりにします。(まったく不成功に終わっているので恥ずかしいのですが、このような直接的方法でもないと、欲しいアソシエーションスキームはなかなか構成出来ないのではないかと思います。興味を持たれる方の挑戦を期待します。)

$\mathbb{F}_p$, $p = 2713$ とする。
Find a polynomial $f(x,y) = ax^4 + x^2y^2 + by^4 - 1$ with the following properties.

Number of the solutions $(x,y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ of $f(x,y) = 0$ are 4 kinds (if $a \neq b$), say $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Let $R_i = \{(a,b) \mid ax^4 + x^2y^2 + by^4 - 1 \text{ has } \alpha_i \text{ solutions}\}$ for $i = 1,2,3,4$. これら R_i 達がアソシエーションスキームの関係になっているような良い状況が起きないだろうか？というのが試みです。このままではもちろん駄目なのですが、なんらかの形で修正して、このような方向で出来ないかと思っています。(ただしなかなか上手くいかないようです。) 個人的には指標表の値が円分体に入らない可換なアソシエーションスキームは存在するほうに賭けたいと思いますし、そのほうがより面白くなると思っています。

補足。
以下の計算は小松亨氏によります。

$$p = 2777, (a,b) = (481460, 83471789), (481463, 83473958), (481466, 83475971), (481466, 83475977), \qquad B_0 = I,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 694 & 180 & 156 & 179 & 178 \\ 0 & 156 & 180 & 179 & 179 \\ 0 & 179 & 179 & 166 & 170 \\ 0 & 178 & 179 & 170 & 167 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 180 & 179 & 179 \\ 694 & 180 & 171 & 172 & 170 \\ 0 & 179 & 172 & 182 & 161 \\ 0 & 179 & 170 & 161 & 184 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 179 & 179 & 166 & 170 \\ 0 & 179 & 172 & 182 & 161 \\ 694 & 166 & 182 & 162 & 183 \\ 0 & 170 & 161 & 183 & 180 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 178 & 179 & 170 & 167 \\ 0 & 179 & 170 & 161 & 184 \\ 0 & 170 & 161 & 183 & 180 \\ 694 & 167 & 184 & 180 & 162 \end{bmatrix}.$$

$p = 2777, (a,b) =$
$(481462, 83473215),$
$(481463, 83473894),$
$(481464, 83474631),$
$(481468, 83477325),$

$$B_0 = I,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 694 & 174 & 180 & 160 & 179 \\ 0 & 180 & 160 & 183 & 171 \\ 0 & 160 & 183 & 183 & 168 \\ 0 & 179 & 171 & 168 & 176 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 180 & 160 & 183 & 171 \\ 694 & 160 & 171 & 178 & 184 \\ 0 & 183 & 178 & 168 & 165 \\ 0 & 171 & 184 & 165 & 174 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 160 & 183 & 183 & 168 \\ 0 & 183 & 178 & 168 & 165 \\ 694 & 183 & 168 & 168 & 174 \\ 0 & 168 & 165 & 174 & 187 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 179 & 171 & 168 & 176 \\ 0 & 171 & 184 & 165 & 174 \\ 0 & 168 & 165 & 174 & 187 \\ 694 & 176 & 174 & 187 & 156 \end{bmatrix}.$$

$p = 2857, (a,b) =$
$(509615, 90901200),$
$(509616, 90901953),$
$(509618, 90903345),$
$(509618, 90903375),$

$$B_0 = I,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 714 & 185 & 162 & 188 & 178 \\ 0 & 162 & 186 & 183 & 183 \\ 0 & 188 & 183 & 166 & 177 \\ 0 & 178 & 183 & 177 & 176 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 162 & 186 & 183 & 183 \\ 714 & 186 & 182 & 180 & 165 \\ 0 & 183 & 180 & 177 & 174 \\ 0 & 183 & 165 & 174 & 192 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 188 & 183 & 166 & 177 \\ 0 & 183 & 180 & 177 & 174 \\ 714 & 166 & 177 & 176 & 194 \\ 0 & 177 & 174 & 194 & 169 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 178 & 183 & 177 & 176 \\ 0 & 183 & 165 & 174 & 192 \\ 0 & 177 & 174 & 194 & 169 \\ 714 & 176 & 192 & 169 & 176 \end{bmatrix}.$$

$p = 3137, (a,b) =$
$(614457, 120354970),$
$(614457, 120355000),$
$(614460, 120357400),$
$(614463, 120359662),$

$$B_0 = I,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 784 & 204 & 181 & 192 & 206 \\ 0 & 181 & 196 & 208 & 199 \\ 0 & 192 & 208 & 194 & 190 \\ 0 & 206 & 199 & 190 & 189 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 181 & 196 & 208 & 199 \\ 784 & 196 & 204 & 182 & 201 \\ 0 & 208 & 182 & 204 & 190 \\ 0 & 199 & 201 & 190 & 194 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 192 & 208 & 194 & 190 \\ 0 & 208 & 182 & 204 & 190 \\ 784 & 194 & 204 & 195 & 190 \\ 0 & 190 & 190 & 190 & 214 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 206 & 199 & 190 & 189 \\ 0 & 199 & 201 & 190 & 194 \\ 0 & 190 & 190 & 190 & 214 \\ 784 & 189 & 194 & 214 & 186 \end{bmatrix}.$$

References

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin/Cummings, 1984.

[2] E. Bannai and A. Munemasa,Davenport–Hasse theorem and cyclotomic association schemes, 「代数的組合せ論」研究集会, 弘前大学, 1990 年 7 月. http://www.math.is.tohoku.ac.jp/ munemasa/documents/hirosaki.pdf

[3] B. C. Berndt, R. J. Evans, and K. S. Williams, *Gauss and Jacobi sums*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1998. xii+583 pp.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[5] M. Hall, Jr. Combinatorial theory. Reprint of the 1986 second edition. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1998. xviii+440 pp.

[6] A. Hanaki, Association schemes of prime order and their splitting fields, Sendai Mini-Symposium on Number Theory and Combinatorial Theory, Jan. 2006, http://www.math.is.tohoku.ac.jp/ taya/sendaiNC/2005/report/hanaki.pdf

[7] A. Hanaki and K. Uno, Algebraic structure of association schemes of prime order, J. Algebraic Combin. 23 (2006), 189-195.

[8] T. Komatsu, Tamely Eisenstein field with prime power discriminant, preprint, available from http://www.math.kyushu-u.ac.jp/coe/report/pdf/2006-13.pdf

[9] 小松亨, アソシエーションスキームに関連する非ガロア代数体について、Sendai Mini-Symposium on Number Theory and Combinatorial Theory, Jan. 2007, http://www.math.is.tohoku.ac.jp/ taya/sendaiNC/2006/report/komatsu.pdf

[10] A. Munemasa, Splitting fields of association schemes, J. Combin. Theory, Ser. A 57 (1991), 157-161.

[11] 山本幸一, 組合せ数学、朝倉書店、1987.